飞机垂直感应场的补偿

王振东

对于航空磁测来说，飞机本身就是一个复杂的干扰体，当对干扰源作出一定假设之后，由泊松公式，据孙文裕的资料其感应干扰场和恒定干扰场之和为：

$$\Delta T_P = \Delta T + H_P = T_0[a_{11}\cos^2 x + a_{22}\cos^2 y + a_{33}\cos^2 z + (a_{12}+a_{21})\cos x \cos y + (a_{13}+a_{31})\cos x \cos z + (a_{23}+a_{32})\cdot \cos y \cos z] + (H_x \cos x + H_y \cos y + H_z \cos z)$$

本文着重分析垂直感应场的变化规律，并给出计算公式和补偿方法。

垂直感应场的一般表达式为：

$$T_0(a_{33}-a_{11})\cos^2 z \qquad (1)$$

式中 T_0为地磁场，a_{11}、a_{33}为泊松系数，z为地磁场向量与飞机坐标 z 轴的夹角。

当飞机在0°、180°航向作俯仰角为$\pm\lambda$的动态飞行时，$\cos z = \sin\phi\cos\lambda - \cos\theta\cos\phi\sin\lambda$，则垂直感应场干扰与平飞时的差值：

$$T_0(a_{33}-a_{11})(\cos^2 z - \sin^2\phi) = T_0(a_{33}-a_{11})(\cos^2\phi\cos^2\lambda - 2\sin\phi\cos\lambda\cdot\cos\phi\sin\lambda\cos\theta + \cos^2\phi\cos^2\theta\sin^2\lambda - \sin^2\phi) = T_0(a_{33}-a_{11})[(\cos^2\phi - \sin^2\phi)(1-\cos^2\lambda) - \sin 2\phi\cos\lambda\cos\theta\sin\lambda] \qquad (2)$$

此处ϕ为地磁倾角，θ为航向角。

令 $M = (\cos^2\phi - \sin^2\phi)(1-\cos^2\lambda)$，$N = \sin 2\phi\cdot\cos\lambda$，则（2）式变成

$$T_0(a_{33}-a_{11})(\cos^2 z - \sin^2\phi) = T_0(a_{33}-a_{11})(M - N\cos\theta\sin\lambda)$$

当飞机在90°、270°航向作摇摆角为$\pm\psi$的左右侧飞时，$\cos z = \sin\phi\cos\psi - \cos\phi\sin\theta\sin\psi$，则

$$T_0(a_{33}-a_{11})(\cos^2 z - \sin^2\phi) = T_0(a_{33}-a_{11})(M' - N'\sin\theta\sin\psi)$$

其中 $M' = (\cos^2\phi - \sin^2\phi)(1-\cos^2\psi)$，$N' = \sin 2\phi\cos\psi$。

显然M、N、M'、N'的值只与λ角大小有关，而与λ角正负号无关。

$$\theta = 0^\circ \quad T_0(a_{33}-a_{11})(M - N\cos\theta\sin\lambda) = T_0(a_{33}-a_{11})(M - N\sin\lambda)$$

$$\theta = 180^\circ \quad T_0(a_{33}-a_{11})(M - N\cos\theta\sin\lambda) = T_0(a_{33}-a_{11})(M + N\sin\lambda)$$

$$\theta = 90^\circ \quad T_0(a_{33}-a_{11})(M' - N'\sin\theta\sin\psi) = T_0(a_{33}-a_{11})(M' - N'\sin\psi)$$

$$\theta = 270^\circ \quad T_0(a_{33}-a_{11})(M' - N'\sin\theta\sin\psi) = T_0(a_{33}-a_{11})(M' + N'\sin\psi)$$

可见在0°、180°航向俯仰飞行与在90°、270°航向左右侧飞，垂直感应场所造成的干扰与平飞时的差值的变化规律完全相同。下面选择0°、180°航向分析它的变化规律。

令 $a'' = T_0(a_{33}-a_{11})(M - N\sin|\lambda|)$

$b'' = T_0(a_{33}-a_{11})(M + N\sin|\lambda|)$

使俯仰角$\lambda = 15°$，讨论$\phi = 5°$、$10°<\phi<45°$和$\phi>45°$三种情况，并与垂直恒定场进行对比见表1。

由表1可见，$T_0(a_{33}-a_{11})\cos^2 z$与$H_z\cos z$当$\phi>45°$时，变化规律相同，可以合并起来近似地用垂直恒定场来补偿。为提高补偿精度，应将垂直感应场从垂直场里分离出来，分别补偿。

由于垂直感应场南北向俯仰和东西向侧飞的变化规律完全一样，我们选用南北向俯仰飞行来推导它的数值计算公式。

当飞机在南北向，即0°、180°航向作俯仰飞行时，磁干扰相对于平飞时的差值可写成：

$$\Delta T_\lambda = T_0(a_{23}+a_{32})(G\cos\theta + P\sin\lambda) + H_z(E - F\cos\theta\sin\lambda + T_0(a_{33}-a_{11})(M - N\cos\theta\sin\lambda) \qquad (3)$$

式中，第一项是感应场$T_0(a_{23}+a_{32})\cos z\cos y$所造成的差值，第二项是垂直恒定场所造成的差值，第三项是垂直感应场所造成的差值。令：

$$a = T_0(a_{23}+a_{32})(G + P\sin|\lambda|)$$

$$b = T_0(a_{23}+a_{32})(G - P\sin|\lambda|)$$

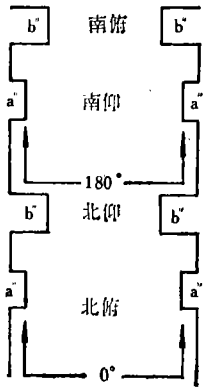
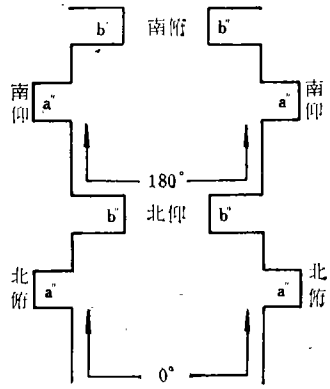
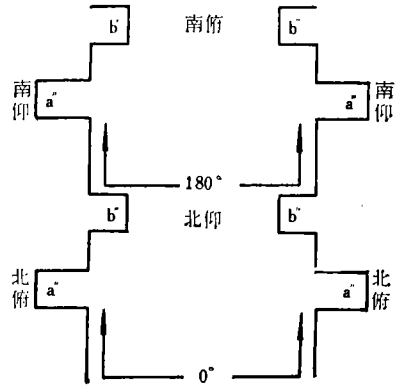
$$a' = H_z(E - F\sin|\lambda|)$$

$$b' = H_z(E + F\sin|\lambda|)$$

$$a'' = T_0(a_{33}-a_{11})(M - N\sin|\lambda|)$$

垂直感应场、垂直恒定场动态与平飞记录对比表 **表 1**

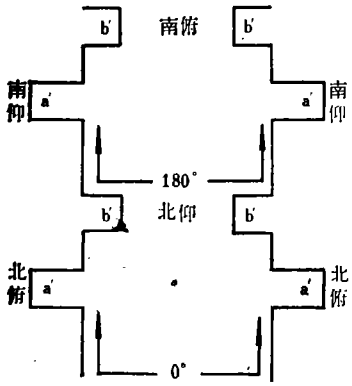
垂直感应场 $T_o(a_{33}-a_{11})\cos^2 z$

$\phi=5°$	$10°<\phi<45°$	$\phi>45°$
$\lvert b''\rvert>\lvert a''\rvert$	$\lvert b''\rvert>\lvert a''\rvert$	$\lvert a''\rvert>\lvert b''\rvert$
		
$T_o(a_{33}-a_{11})>0$ $T_o(a_{33}-a_{11})<0$	$T_o(a_{33}-a_{11})>0$ $T_o(a_{33}-a_{11})<0$	$T_o(a_{33}-a_{11})>0$ $T_o(a_{33}-a_{11})<0$

垂直恒定场$H_z\cos z$

$0°<\phi<90°$

$\lvert a'\rvert>\lvert b'\rvert$



$H_z>0$ $H_z<0$

$$T_o(a_{33}-a_{11})\cos^2 z$$

（1）$\phi=5°$ $M>0$ $N>0$ $|M|>|N\sin 15°|$

（2）$10°<\phi<45°$ $M>0$ $N>0$ $|M|<|N\sin 15°|$

（3）$\phi>45°$ $M<0$ $N>0$ $|M|<|N\sin 15°|$

$$H_z\cos z$$

$0°<\phi<90°$ $E<0$ $F>0$ $|E|<|F\sin 15°|$

$$b''=T_0(a_{33}-a_{11})(M+N\sin|\lambda|)$$

则（3）式分别变为：

$$\begin{cases}\Delta T_{\lambda 0°}=a+a'+a''\\ \Delta T_{-\lambda 0°}=b+b'+b''\\ \Delta T_{\lambda 180°}=-b+b'+b''\\ \Delta T_{-\lambda 180°}=-a+a'+a''\end{cases}\qquad(4)$$

解方程组（4）有：

$$a'+a''=\frac{\Delta T_{\lambda 0°}+\Delta T_{-\lambda 180°}}{2}$$

$$b'+b''=\frac{\Delta T_{-\lambda 0°}-\Delta T_{\lambda 180°}}{2}$$

为了进一步将垂直感应场分离出来，需要再解下列方程组：

$$\begin{cases}a'+a''=\dfrac{\Delta T_{\lambda 0°}+\Delta T_{-\lambda 180°}}{2}\\ b'+b''=\dfrac{\Delta T_{-\lambda 0°}+\Delta T_{\lambda 180°}}{2}\\ \dfrac{a'}{b'}=\dfrac{E-F\sin|\lambda|}{E+F\sin|\lambda|}\\ \dfrac{a''}{b''}=\dfrac{M-N\sin|\lambda|}{M+N\sin|\lambda|}\end{cases}\qquad(5)$$

方程中，$\Delta T_{\lambda 0°}$ 是北俯与平飞的差值，$\Delta T_{-\lambda 180°}$ 是南仰与平飞的差值，$\Delta T_{-\lambda 0°}$ 是北仰与平飞的差值，$\Delta T_{\lambda 180°}$ 是南俯与平飞的差值，$M=(\cos^2\phi-\sin^2\phi)(1-\cos^2\lambda)$，$N=\sin 2\phi\cos\lambda$，$E=\sin\phi\cos\lambda-\sin\phi$，$F=\cos\phi$。$\phi$ 为地磁倾角，λ 为俯仰角，λ 角一般取10°—15°。方程右边都是已知量，因此可求出 a'' 和 b''，而 a'' 和 b'' 之间是按一定比例变化的，所以只要求出 a'' 即可求出垂直感应场 $T_0(a_{33}-a_{11})\cos^2 z$；换算成平飞时在0°航向的干扰值记为 a_0''，$a_0''=T_0(a_{33}-a_{11})\sin^2\phi$。

当 $\lambda=10°$—15°、$\phi>10°$ 时，$|M|<|N\sin|\lambda||$。

设 $T_0(a_{33}-a_{11})>0$，则：

$$a_0''>0$$

$$a''=T_0(a_{33}-a_{11})(M-N\sin|\lambda|)<0$$

即0°航向平飞时的干扰值 a_0' 与动态时的干扰值 a'' 符号相反。所以0°航向平飞时取补偿值 $a_0''^*=-a_0''$，显然 $a_0''^*$ 与 a'' 符号一致。

令
$$K_{zz}=\frac{a_0''}{a''}$$

由
$$a_0''=T_0(a_{33}-a_{11})\cos^2 z_0=T_0(a_{33}-a_{11})\sin^2\phi$$
$$a''=T_0(a_{33}-a_{11})(M-N\sin|\lambda|)$$

所以
$$K_{zz}=\frac{\sin^2\phi}{M-N\sin|\lambda|}$$

$$=\frac{\sin^2\phi}{(\cos^2\phi-\sin^2\phi)(1-\cos^2\lambda)-\sin 2\phi\cos\lambda\sin|\lambda|} \quad (6)$$

从(6)式可知，当 $\lambda=10°$—15°、$\phi>10°$ 时，K_{zz} 为负值，

所以
$$a_0''^*=-a_0''=|K_{zz}|a'' \quad (7)$$

当 ϕ 很小或 λ 很大（例如 $\phi=5°$，$\lambda=15°$）时，$M-N\sin|\lambda|>0$，此时若 $a''<0$，则 $T_0(a_{33}-a_{11})<0$，平飞时的干扰值 $a_0''=T_0(a_{33}-a_{11})\sin^2\phi<0$，于是补偿值 $a_0''^*=-a_0''>0$，与动态时的干扰值 a'' 符号相反，即：

$$a_0''^*=-|K_{zz}|a'' \quad (8)$$

在纬度很低的地带进行磁补偿，此点尤其要予以注意。

补偿垂直感应场，可用带有这项补偿器的装置，例如CBK-1航磁电子补偿仪进行。使飞机处于平飞状态补 $a_0''^*$，用 W_{zz} 电位器调节补偿量，用它的反向开关决定补偿的正负。

垂直恒定场的平飞补偿值 $a_0'^*$，亦应由方程(5)解出 a'，后由 $K_z=\frac{\sin\phi}{\sin(\phi-|\lambda|)-\sin\phi}$ 及 $a_0'^*=|K_z|a'$ 算出。补偿方法与垂直感应场的相同。

在进行垂直干扰场的补偿时，《磁补偿的原理及其方法》一文曾经提出在摇摆角 ψ 及俯仰角 $\lambda<15°$、地磁倾角 $\phi>30°$ 的前提下，将垂直感应场与垂直恒定场合并，并且近似地用垂直恒定场补偿器来进行补偿。

垂直感应场和垂直恒定场在飞机作动态飞行时，相对于平飞之间的磁干扰差值分别为：$T_0(a_{33}-a_{11})(\cos^2 z-\sin^2\phi)$ 和 $H_z(\cos z-\sin\phi)$。以武汉地区为例，$\phi=44°$，当飞机在0°航向作 $\lambda=15°$ 的俯仰飞行时：

$$\sin\phi=\sin 44°=0.6947$$

$$\cos z=\sin\phi\cos\lambda-\cos\phi\cos\theta\sin\lambda\doteq 0.5$$

设垂直感应场的系数与垂直恒定场的系数相等，为某一常量 l，即 $T_0(a_{33}-a_{11})=H_z=l$，则

$$L_1=(\cos^2 z-\sin^2\phi)l+(\cos z-\sin\phi)l$$
$$\doteq -0.43\,l$$

若把垂直感应场与垂直恒定场合并，近似用垂直恒定场来补，则有：

$$L_2=(\cos z-\sin\phi)l+(\cos z-\sin\phi)l$$
$$\doteq -0.39\,l$$

相对误差 $\left|\frac{\Delta L}{L}\right|=\left|\frac{L_2-L_1}{L_1}\right|=\frac{0.04}{0.43}\doteq 9.3\%$

上述计算表明，即使在地磁倾角大于30°的武汉地区，这种近似将带来9%的误差，而当运载工具的垂直感应场系数比垂直恒定场系数大时，误差将更大。

将垂直感应场分离出来，就使我们对飞机的三项恒磁干扰和五项感磁干扰可以一一对应地分别进行补偿，补偿工作不再受地磁倾角限制，对垂直感应场较大的运载工具也能获得较高的补偿精度。

（上接第55页）

为了直观，我们举例说明，有A、B、C三人打靶，其结果列于图10中。A的子弹打得集中，离散度很小，我们说“精密度很高”，但是击中的部位偏离了靶心（真值），我们说“准确度不高”。B的子弹打在靶心附近，精密度、准确度都很高。而C的情况，精密度、准确度都很差了。

3．测量结果的评价

测量结果的质量可以从两方面来评价。首先根据统计规律来检验原始记录的观察质量，即测量一个样品的几次读数是否都在 $2\sigma_{\Delta I}$ 范围内。对于有限次（例如工作中常读三至五次）读数中若有超过 $2\sigma_{\Delta I}$ 的应该删去并重读。其次是对测量结果抽样进行外检，用多种测定方法对同一样品进行测定，并作图加以比较。如图11，纵轴表示X-射线荧光分析结果，横轴表示外检结果，若X-射线荧光分析结果可靠，各点应该落在45°线左右。